Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра алгебры и математической логики

Паспорт
расчетно-графического задания

по дисциплине «Линейная алгебра», 1 семестр

1. Методика оценки

В рамках расчетно-графического задания по дисциплине студенты должны решить 13 задач на различные темы всего курса.

При выполнении расчетно-графического задания студенты должны изучить весь теоретический материал курса и применить его при решении практических задач.

Оцениваемые позиции: Отдельно оценивается каждое задание.

Задачи 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 оцениваются в 1 балл, если задание решено верно и в 0 баллов, если задание решено не верно.

Задачи 6 и 11 оцениваются в 0 баллов, если пункты а) и б) решены неверно, в 1 балл, если пункт а) или б) решен верно и в 2 балла, если оба пункта решены верно.

Задача 12 оцениваются в 0 баллов, если пункты а), б) и в) решены неверно, в 1 балл, если пункт а) или б) или в) решен верно, в 2 балла, если решены верно два пункта задачи и в 3 балла, если все пункты решены верно.

Задача 13 оцениваются в 0 баллов, если все пункты решены неверно, далее в 1 балл оценивается каждый верно решенный пункт задачи. Максимально количество баллов за задачу – 3 балла..

2. Критерии оценки

- Работа считается **не выполненной,** если выполнено 25 % заданий РГЗ, оценка составляет 0-5 баллов.

- Работа считается выполненной **на пороговом** уровне, если выполнено 50 % заданий РГЗ, оценка составляет 6-10 баллов.

- Работа считается выполненной **на базовом** уровне, если выполнено 75 % заданий РГЗ, оценка составляет 11-15 баллов.

- Работа считается выполненной **на продвинутом** уровне, если выполнено 100 % заданий РГЗ, оценка составляет 16-20 баллов.

3. Шкала оценки

В общей оценке по дисциплине баллы за РГЗ учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

4. Пример варианта РГЗ

Вариант 1

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(8,6,4), \quad A_2(10,5,5), \quad A_3(5,6,8), \quad A_4(8,10,7)$$

Задача 2. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух заданных точек $A(1,1)$ и $B(3,0)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{1}, \qquad A(4,2,-1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(1,2,3), \quad \frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1=(-2,1,1)$, $a_2=(0,3,3)$, $a_3=(2,0,-2)$, $d=(2,4,0)$.
Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(2,3,4)$, $a_3=(3,2,3)$, $a_4=(1,1,1)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а) Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости xOz, а затем сжатие по оси Oy в два раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

$$\Phi=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & \gamma \\ \beta & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2=24$;
2) $2x^2-2xy+2y^2-2x-2y+1=0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.